V-2 (42 min) 3-Febrero-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Diagonalización de matrices**

Diagonalización de una matriz (A^{nxn})

Consiste en encontrar una serie de valores propios $\lambda_i = \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ y de vectores asociados $\vec{v}_i = \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n$ que cumplan:

$$(A^{nxn}) \cdot (\vec{v}_i) = \lambda_i \cdot (\vec{v}_i)$$

(Para multiplicar la matriz (A^{nxn})por un vector $\vec{v}_i$, éste se pone con sus componentes en matriz columna)
Se llama "diagonalizar" porque con los valores propios λ_i se forma una matriz diagonal (D) = (λ_i) que ya veremos cumple determinadas propiedades, como que ***det (D) = det (A)***

EJEMPLO: Diagonalizar $(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ que vemos es simétrica.

Como n = 2, suponemos que los vectores propios son de dos componentes (v_{ix} , v_{iy}). Para cualquiera de ellos se tiene que cumplir:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{pmatrix}$$

Operamos y nos queda sistema de dos ecuaciones, pero con tres incógnitas:

$$v_{ix} - v_{iy} = \lambda_i v_{ix} \quad \rightarrow \quad (\lambda_i - 1)v_{ix} + v_{iy} = 0 \quad \text{(I)}$$

$$-v_{ix} + v_{iy} = \lambda_i v_{iy} \quad \rightarrow \quad v_{ix} + (\lambda_i - 1)v_{iy} = 0 \quad \text{(II)}$$

Un sistema así puede tener muchas soluciones para las componentes de cada vector propio $\vec{v}_i$. Pero para que sea compatible e indeterminado, ha de cumplirse que el determinante formado por los coeficiente sea nulo. Imponemos esa condición:

$$\begin{bmatrix} (\lambda_i - 1) & 1 \\ 1 & (\lambda_i - 1) \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_i^2 - 2\lambda_i = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_i(\lambda_i - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_i = 0 \text{ ó } \lambda_i = 2$$

Deducimos que, para obtener soluciones del sistema de ecuaciones, λ puede tomar esos dos valores, que son los valores propios encontrados, que llamaremos:

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 0 \quad ; \quad \lambda_2 = 2}$$

Los vectores propios asociados los deducimos sustituyendo cada valor de λ en (I) y (II):

(i=1) **Para $\lambda_1 = 0$** tanto de (I) como de (II) se deduce que el vector $\vec{v}_1$ cumple que $v_{1x} = v_{1y}$. Significa que hay infinitos vectores propios $\vec{v}_1$ **con tal de que tenga iguales sus dos componentes.**

$$\vec{v}_1 = \vec{\imath} + \vec{\jmath} \;; \quad \vec{v}_1 = -\vec{\imath} - \vec{\jmath} \;; \quad \vec{v}_1 = 5\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} \;; \quad \vec{v}_1 = -5\vec{\imath} - 5\,\vec{\jmath} \;\ldots. \;\textbf{. Hay infinitos}$$

(i=2)) **Para $\lambda_2 = 2$** tanto de (I) como de (II) se deduce que el vector $\vec{v}_2$ cumple que $v_{1x} = -v_{1y}$. Significa que hay infinitos vectores propios $\vec{v}_2$ **con tal de que tenga iguales y cambiadas de signo sus dos componentes.**

$$\vec{v}_2 = \vec{\imath} - \vec{\jmath} \;; \quad \vec{v}_2 = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} \;; \quad \vec{v}_2 = 5\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} \;; \quad \vec{v}_1 = -5\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} \;\ldots. \;\textbf{. Hay infinitos}$$

Vemos que para cada valor propio hay infinitos vectores propios asociados, aunque siempre cumplen ser ortogonales**:** $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$. Se suelen elegir con las siguientes condiciones:

a) Vectores normalizados (módulo 1). Del ejemplo, lo cumplen los siguientes:

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath} \;; \quad \vec{v}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath} \;; \qquad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath} \;; \quad \vec{v}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$$

b) Se forma matriz (V^{nxn}) cuyas columnas son los vectores, queremos que su determinante **| V^{nxn} |= +1**

Esta condición hace que, del ejemplo, nos quedemos con: $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$ **y** $\vec{v}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$

Matriz con vectores propios: $(V) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \rightarrow$ **|V| = + 1**

La Matriz (V^{nxn}) cuyas columnas son los vectores propios, que cumple: a) son vectores ortogonales $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ y b) su determinante **|V| = + 1** se llama Matriz Ortogonal (ver grupos de Lie: matriz de rotación).
Las matrices ortogonales cumplen que su inversa es igual a su traspuesta: $(V^{nxn})^{-1} = (V^{nxn})^T$ **(I)**

TEOREMA: Matriz simétrica ↔ Ortogonalmente diagonalizable. Si no es simétrica, puede o no, diagonalizarse.

Suponemos que tenemos la matriz (A^{nxn}) simétrica, a la que hemos diagonalizado, obteniendo los valores propios $\lambda_i = \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ y los vectores propios asociados, y normalizados, $\vec{v}_i = \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n$.
La matriz (V^{nxn}), construida con columnas de vectores propios, es ortogonal y cumple $(V^{nxn})^{-1} = (V^{nxn})^T$.

(D^{nxn}) es diagonal $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ y cumple: $\boxed{(V^{nxn})^T \cdot (A^{nxn}) \cdot (V^{nxn}) = (D^{nxn})}$ **(II)**

Recordemos nuestro ejemplo: $(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalizada con valores propios $\lambda_1 = 0 \quad y \quad \lambda_2 = 2$

La matriz vectores propios es: $(V) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ortogonal. Su traspuesta (inversa): $(V)^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Se comprueba multiplicando matrices que se cumple: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Fácilmente se puede demostrar, multiplicando convenientemente por matriz inversa, que también se cumplen las relaciones siguientes:

$\boxed{(A^{nxn}) \cdot (V^{nxn}) = (V^{nxn}) \cdot (D^{nxn})}$ también $\boxed{(A^{nxn}) = (V^{nxn}) \cdot (D^{nxn}) \cdot (V^{nxn})^T}$ **(III)**

El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes.

Como $\det(V^{nxn}) = det(V^{nxn})^T = 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\det(A^{nxn}) = \det(D^{nxn})}$ **(IV)**

<u>Utilidad de la diagonalización de matrices</u>

Tenemos *"cosa" ¿? = f* $(\phi_1, \phi_2, \dots \phi_n)$ siendo ϕi una serie de valores discretos, que pueden representar las componentes de un vector, o los valores de un campo en determinados puntos.
La función $f(\phi_1, \phi_2, \dots \phi_n)$ tiene términos en que sólo aparece ϕi, pero también términos en los que aparecen productos cruzados $\phi i \cdot \phi j$. Además suponemos puede expresar mediante matriz simétrica (A^{nxn}):

$$\text{"cosa"} = f(\phi_1, \phi_2, \dots \phi_n) = (\phi_1 \dots \phi_n) \cdot (A^{nxn}) \cdot \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \dots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

<u>EJEMPLO:</u> $\text{"cosa"} = \phi_1^2 + \phi_2^2 - 2\phi_1\phi_2 = (\phi_1 \ \ \phi_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$

Se diagonaliza la matriz simétrica (A^{nxn}) y obtenemos sus valores propios $\lambda_i = \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ y vectores propios asociados $\vec{v}_i = \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n$. Si hacemos un <u>cambio de variables</u> $(\phi_1, \phi_2, \dots \phi_n) \rightarrow (\Psi_1, \Psi_2 \dots \Psi_n)$ regido por la matriz de los vectores propios (es como cambiar la base a que sea los vectores propios):

$\boxed{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \dots \\ \phi_n \end{pmatrix} = (V^{nxn}) \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \dots \\ \psi_n \end{pmatrix}}$ (s.p.d.) se obtiene: $\boxed{\text{"cosa"} = f(\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n) = \lambda_1\psi_1^2 + \lambda_2\psi_2^2 + \cdots + \lambda_n\psi_n^2}$ **(V)**

Se consigue así una expresión en la que no aparecen ya ningún término con productos cruzados.

En el ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalizada con $\lambda_1 = 0 \quad y \quad \lambda_2 = 2$ y $(V) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Hacemos cambio: $\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2 \\ \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2 \end{cases}$

Sustituimos en la expresión de la "cosa" y se obtiene:

$$\text{"cosa"} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2\right) = \cdots = 2\psi_2^2$$

Comprobamos así que "cosa" se expresa con los valores propios: $\phi_1^2 + \phi_2^2 - 2\phi_1\phi_2 = 0\psi_1^2 + 2\psi_2^2$ sin productos cruzados.

En el video se propone otro ejercicio, similar al ejemplo, para realizar por los suscriptores.